Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalități de lucru diferențiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

6

Ediția a IX-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E. nr. 4174/09.04.2024.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Iuliana Ene, Andreea Roșca
Tehnoredactare: Roxana Pietreanu, Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION
Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : clasa 6 / Ion Tudor. – Ed. a 9-a. – Pitești : Paralela 45, 2025
2 vol.
ISBN 978-973-47-4298-1
Partea 2. – 2025. – ISBN 978-973-47-4374-2

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

ALGEBRĂ

Capitolul III

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg

Citesc și rețin

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „+” în față: +1, +2, +3, … se numesc numere întregi pozitive. Mulțimea numerelor întregi pozitive se notează cu $\mathbb{Z}_+$, deci $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, \dots\}$ și avem $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$.

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „–” în față: –1, –2, –3, … se numesc numere întregi negative. Mulțimea numerelor întregi negative se notează cu $\mathbb{Z}_-$, deci $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \dots\}$.

Numărul natural 0 este singurul număr întreg care nu este nici pozitiv, nici negativ.

Mulțimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$ și se definește astfel: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

Mulțimea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se numește mulțimea numerelor întregi nenule.

Numerele întregi care aparțin reuniunii $\{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ se numesc numere întregi nenegative.

Definiție: Prin **opusul numărului** întreg nenul a înțelegem numărul întreg $-a$. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0.

Exemple: Opusul numărului întreg 5 este numărul întreg –5.
Opusul numărului întreg –8 este numărul întreg 8.

Cum se aplică?

1. Se consideră mulțimea $A = \{-6, 15, 0, -21, 8\}$. Determinați mulțimile:
a) $E = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$;
b) $F = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

Soluție:
a) $E = \{15, 8\}$; b) $F = \{-6, -21\}$.

2. Scrieți opusele următoarelor numere întregi:
a) –9; b) 0; c) 17; d) –11.

Soluție:
a) 9; b) 0; c) –17; d) 11.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți mulțimile următoare:

a) $\mathbb{Z}_+$; b) $\mathbb{Z}_-$; c) $\mathbb{Z}^*$; d) $\mathbb{Z}$.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $-25 \in \mathbb{Z}_-$; ☐ b) $42 \in \mathbb{Z}_+$; ☐ c) $51 \notin \mathbb{Z}_-$; ☐ d) $-71 \notin \mathbb{Z}_+$; ☐

e) $49 \notin \mathbb{Z}_+$; ☐ f) $-28 \in \mathbb{Z}_-$; ☐ g) $-35 \notin \mathbb{Z}_-$; ☐ h) $87 \in \mathbb{Z}_+$. ☐

3. Se consideră mulțimea $A = \{-2, 4, -5, 7, 8, -1, 0, -13, 12, -9\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

a) $A_1 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$; b) $A_2 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

a)	
b)	

4. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) Mulțimea $\mathbb{Z}_+$ este finită. ☐ b) Mulțimea $\mathbb{Z}_-$ este finită. ☐

c) Mulțimea $\mathbb{Z}^*$ este infinită. ☐ d) Mulțimea $\mathbb{Z}$ este infinită. ☐

5. Se consideră mulțimea $E = \{-15, 0, 6, -8, 2, 17\}$. Determinați următoarele mulțimi:

a) $E \cap \mathbb{Z}_-$; b) $E \cap \mathbb{Z}_+$; c) $E \cap \mathbb{Z}^*$; d) $E \setminus \mathbb{Z}_-$; e) $E \setminus \mathbb{Z}_+$; f) $E \setminus \mathbb{Z}^*$.

a)	$E \cap \mathbb{Z}_- =$
e)	$E \setminus \mathbb{Z}_+ =$

6. Completați tabelul următor:

Numărul	43	–7	–25	134	0	–91	–72	64	–8
Opusul									

7. Completați tabelul următor:

Numărul	–6			201		–18			92
Opusul		42	–58		307		–9	83	

Exerciții și probleme de dificultate redusă

8. Se consideră mulțimea $A = \{-6, -5, 2, 0, 1, 7, -13\}$. Determinați mulțimea $B = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in A\}$.

9. Se consideră mulțimea $E = \{-1, -4, 6, -11, 8, 0, 9\}$. Determinați mulțimea $F = \{y \mid y \text{ este opusul lui } x, x \in E\}$.

10. Se consideră mulțimea $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ este număr prim de o cifră$\}$. Enumerați elementele mulțimii $F = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = -n, n \in E\}$.

11. Se consideră mulțimea $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ este număr compus de o cifră$\}$. Enumerați elementele mulțimii $F = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = -n, n \in E\}$.

12. Se consideră mulțimile $X = \{-8, 0, 3\}$ și $Y = \{y \mid y$ este opusul lui $x, x \in X\}$. Scrieți submulțimile mulțimii Y.

Exerciții și probleme de dificultate medie

13. Se consideră mulțimile $X = \{-9, -5, 2, 0, -3, 1, 3\}$ și $Y = \{y \in \mathbb{Z}^* \mid y$ este opusul lui $x, x \in X\}$. Câte submulțimi are mulțimea Y?

14. Se consideră mulțimile $A = \{-7, -1, 0, 1, 4\}$ și $B = \{b \mid b$ este opusul lui $a, a \in A\}$. Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora.

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

15. Se consideră mulțimile $A = \{-17, -13, 0, 13, 17\}$ și $B = \{x \mid x$ este opusul lui $a, a \in A \cap \mathbb{Z}^*\}$. Determinați mulțimile $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

16. Se consideră mulțimile $E = \{-7, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$, $F = \{y \mid y$ este opusul lui $x, x \in E \cap \mathbb{Z}_-\}$ și $D = \{z \mid z$ este opusul lui $x, x \in E \cap \mathbb{Z}_+\}$. Determinați mulțimile:

a) $E \cap F$; b) $E \cap D$; c) $E \setminus F$; d) $E \setminus D$.

17. Se consideră mulțimile $A = \{-9, -5, -3, 0, 3, 5\}$, $A_1 = \{x \mid x$ este opusul lui $a, a \in A \setminus \mathbb{Z}_+\}$ și $A_2 = \{z \mid z$ este opusul lui $a, a \in A \setminus \mathbb{Z}_-\}$. Determinați mulțimile:

a) $A \cap A_1$; b) $A \cap A_2$; c) $A_1 \setminus A$; d) $A \setminus A_2$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

18. Se consideră mulțimile $M = \{-6, -4, -2, 0, 4, 6, 8\}$, $P = \{p \mid p$ este opusul lui $m, m \in M \cap \mathbb{Z}_+\}$ și $Q = \{q \mid q$ este opusul lui $m, m \in M \cap \mathbb{Z}_-\}$. Determinați mulțimile:

a) $M \setminus (P \cup Q)$; b) $M \cap (P \cup Q)$; c) $(P \cup Q) \setminus M$.

19. Se consideră mulțimile $E = \{-11, -6, 0, 6, 7, 8\}$, $E_1 = \{y \mid y$ este opusul lui $x, x \in E \setminus \mathbb{Z}_-\}$ și $E_2 = \{z \mid z$ este opusul lui $x, x \in E \setminus \mathbb{Z}_+\}$. Determinați mulțimile:

a) $E \setminus (E_1 \cup E_2)$; b) $E \cap (E_1 \cup E_2)$; c) $(E_1 \cup E_2) \setminus E$.

20. Determinați mulțimile $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ și $F = \{y \mid y \in \mathbb{Z}^*, y = -x, x \in E\}$, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

1. $E \cup F = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$; 2. $E \setminus \mathbb{Z}_- = \{0, 5\}$; 3. $F \setminus \mathbb{Z}_+ = \{-5\}$.

21. Determinați mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{y \mid y = -x, x \in A\}$, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

1. $A \cap \mathbb{Z}_- = \{-7, -3\}$; 2. $B \setminus \mathbb{Z}_+ = \{-3, 0\}$.

22. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{y \mid y = -x, x \in E\}$. Determinați mulțimea $A \cap B$, știind că mulțimile A și B îndeplinesc simultan condițiile:

1. $A \neq B$; 2. $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; 3. $A \cap \mathbb{Z}_- = \{-2, -1\}$.

Lecția 4. Adunarea numerelor întregi. Proprietățile adunării

Citesc și rețin

Suma a două numere întregi x și y este un număr întreg unic, notat $x + y$. Operația prin care se obține suma a două numere se numește **adunare**.

Suma numerelor întregi x și y, pe care o notăm cu S, se obține astfel:

- dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci $S = +(|x| + |y|)$;
- dacă $x < 0$ și $y < 0$, atunci $S = -(|x| + |y|)$;
- dacă $x > 0$, $y < 0$ și $|x| > |y|$, atunci $S = +(|x| - |y|)$;
- dacă $x > 0$, $y < 0$ și $|x| = |y|$, atunci $S = 0$;
- dacă $x > 0$, $y < 0$ și $|x| < |y|$, atunci $S = -(|y| - |x|)$;
- dacă $x = 0$, atunci $S = y$, iar dacă $y = 0$, atunci $S = x$.

Proprietățile adunării

- **Comutativitatea:** $x + y = y + x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$;
- **Asociativitatea:** $(x + y) + z = x + (y + z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$;
- **0 este element neutru:** $x + 0 = 0 + x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

Cum se aplică?

1. Efectuați:

a) $5 + 39$; b) $(-7) + (-8)$; c) $14 + (-8)$; d) $(-29) + 16$.

Soluție:

a) $5 + 39 = +(5 + 39) = +44 = 44$; b) $(-7) + (-8) = -(7 + 8) = -15$;
c) $14 + (-8) = +(14 - 8) = +6 = 6$; d) $(-29) + 16 = -(29 - 16) = -13$.

2. Calculați:

a) $(-12) + (-23) + 31$; b) $|-8| + (-27) + |16|$.

Soluție:

a) $(-12) + (-23) + 31 = (-35) + 31 = -4$;
b) $|-8| + (-27) + |16| = 8 + (-27) + 16 = -19 + 16 = -3$.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Efectuați:

a) $(-5) + (-7) =$ b) $(-4) + (-6) =$ c) $(-6) + (-9) =$
d) $(-14) + (-4) =$ e) $(-7) + (-25) =$ f) $(-29) + (-8) =$

2. Efectuați:

a) $8 + (-2) =$ b) $(-5) + 8 =$ c) $9 + (-7) =$
d) $(-19) + 8 =$ e) $6 + (-23) =$ f) $(-28) + 9 =$

3. Completați tabelul următor:

x	–20	45	–26	–25	–50	80	–70	–67
y	32	–23	–18	–35	15	–45	–20	42
$x+y$								

4. Aflați suma următoarelor numere întregi:

a) –5 și –8; b) 13 și –7; c) –4 și –9; d) –6 și 16;
e) –26 și –8; f) 29 și –35; g) –4 și –49; h) –56 și 27.

f) 29 + (–35) =

h) (–56) + 27 =

5. Într-o zi de iarnă, temperatura minimă pe țară a fost de –21°C. Determinați temperatura minimă pe țară din ziua următoare, știind că aceasta a fost mai scăzută cu 2°C.

Exerciții și probleme de dificultate redusă

6. Marea Moartă se află la altitudinea de –394 m. O echipă de cercetători a scufundat o cameră de luat vederi la adâncimea de 17 m pentru a detecta eventualele forme de viață din această mare. Determinați altitudinea camerei de luat vederi.

7. Calculați:

a) (–5) + (–6) + (–25); b) (–7) + (–32) + (–4); c) (–39) + (–8) + (–3);
d) (–2) + (–45) + (–12); e) (–19) + (–6) + (–52); f) (–56) + (–7) + (–15).

8. Calculați:

a) (–18) + 24 + (–8); b) (–14) + (–9) + 20; c) 25 + (–17) + (–28);
d) (–27) + 31 + (–11); e) (–38) + 30 + (–17); f) (–42) + (–16) + 70.

9. Calculați:

a) |–21| + (–5); b) (–19) + |–7|; c) |26| + (–12);
d) |–6| + (–37); e) (–34) + |18|; f) |–35| + (–8).

10. Calculați:

a) |–12| + |25| + (–20); b) |26| + (–80) + |–45|; c) (–49) + |–13| + |42|;
d) |–54| + (–95) + |31|; e) |–43| + (–75) + |19|; f) (–80) + |25| + |–37|.

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Calculați:

a) 20 + (–25) + (–33) + 49; b) (–14) + (–13) + 30 + (–8);
c) (–24) + 27 + 20 + (–18); d) (–45) + 29 + (–32) + (–2).

12. Calculați:

a) |–8| + (–37) + (–25) + |31|; b) (–4) + |–39| + (–63) + |17|;
c) |61| + (–5) + |–24| + (–70); d) (–57) + (–6) + |18| + |–35|.

13. Temperatura maximă pe țară înregistrată la ora 7 în ziua de 27 februarie, anul 2016 a fost de $-4°C$ și a crescut cu $1°C$ în fiecare din următoarele trei zile. Precizați temperatura maximă pe țară înregistrată la ora 7 în ziua de 1 martie.

14. Calculați $x + y$ și $y + (-x)$ în următoarele cazuri:
a) $x = (-72) + |-28| + (-87)$ și $y = |59| + (-98) + (-79)$;
b) $x = |92| + (-165) + (-83)$ și $y = (-75) + |-29| + 127$;
c) $x = (-59) + (-48) + |203|$ și $y = |-83| + (-312) + 158$.

15. Calculați suma elementelor mulțimii A în următoarele cazuri:
a) $A = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid |x| \le 123\}$; b) $A = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid |x| < 201\}$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Calculați suma elementelor mulțimii E în următoarele cazuri:
a) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -21 \le x < 73\}$; b) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -97 < x \le 48\}$.

17. Calculați $S_1 + S_2$, știind că:
a) $S_1 = (-2) + (-4) + (-6) + ... + (-200)$ și $S_2 = (-3) + (-6) + (-9) + ... + (-600)$;
b) $S_1 = (-4) + (-8) + (-12) + ... + (-92)$ și $S_2 = (-6) + (-12) + (-18) + ... + (-96)$.

18. Calculați $S_1 + S_2$, știind că:
a) $S_1 = (-5) + (-10) + (-15) + ... + (-500)$ și $S_2 = 6 + 12 + 18 + ... + 300$;
b) $S_1 = 7 + 14 + 21 + ... + 210$ și $S_2 = (-8) + (-16) + (-24) + ... + (-120)$.

19. Se consideră suma: $S = 1 + (-3) + 5 + (-7) + ... + 2021$. Calculați valoarea absolută a sumei S.

20. Se consideră numărul întreg $a = (-1) + 2 + (-3) + \dots + (-2013)$. Determinați opusul numărului întreg a.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

21. Se dă suma $s = |-1| + |(-1)+1| + |(-1)+1+(-1)| + \dots + |\underbrace{(-1)+1+(-1)+\dots+(-1)}_{n \text{ termeni}}|$.

Determinați numărul natural n pentru care $s = 101$.

22. Abscisele a n puncte distincte de pe axa numerelor sunt numere întregi consecutive, cu suma egală cu 49. Determinați n.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 1/2022)

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Calculați suma următoarelor numere întregi:
a) -24 și 45; b) -32 și -9; c) $|-27|$ și -30.

(3p) **2.** Calculați:
a) $(-19) + 28 + (-2)$; b) $34 + (-14) + (-20)$; c) $|-55| + (-60) + (-1)$.

(3p) **3.** Calculați $x + y$ știind că: $x = |27| + |-5| + (-81)$ și $y = |-46| + |4| + (-60) + 11$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

(1p) **1.** Rezultatul calculului (–5) + (–15) + 10 este egal cu:
A. –10; B. 30; C. 25; D. –15.

(1p) **2.** Rezultatul calculului 5 – (–10) – 20 este egal cu:
A. 12; B. –6; C. –5; D. 18.

(1p) **3.** Rezultatul calculului (–2) · (–5) + 3 · (–4) este egal cu:
A. 14; B. –2; C. –3; D. 23.

(1p) **4.** Rezultatul calculului 25 : (–5) + (–20) : (–4) este egal cu:
A. –8; B. 0; C. 4; D. –6.

(1p) **5.** Rezultatul calculului $(-2)^3 - (-2)^2$ este egal cu:
A. –16; B. 4; C. 8; D. –12.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete:

(1p) **1.** Aflați rezultatul calculului $[(-6) : (-3) + (-5)]^2 \cdot (-2)^3$.

(1p) **2.** Determinați modulul numărului întreg:

$$x = \{(-1)^{11} - [(-7) \cdot (-7)^2]^3 : (-7)^7\} : (-5)^2.$$

(1p) **3.** Determinați numerele întregi și consecutive de aceeași paritate a, b și c cu proprietatea $a \cdot b - a \cdot c = 240$.

(1p) **4.** Se consideră numărul întreg $a = |2^{28} - 3^{14}| + |2^{21} - 3^{14}|$. Arătați că $a > 5^{12}$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

(1p) **1.** Rezultatul calculului (–20) + 12 + 13 este egal cu:
A. –10; B. 5; C. 6; D. –15.

(1p) **2.** Rezultatul calculului 14 – (–6) – 30 este egal cu:
A. 21; B. –12; C. –10; D. 27.

(1p) **3.** Rezultatul calculului (–4) · 2 + (–6) · (–3) este egal cu:
A. 10; B. –14; C. –17; D. 20.

(1p) **4.** Rezultatul calculului (–9) : (–3) – (–14) : 7 este egal cu:
A. 8; B. –10; C. –13; D. 5.

(1p) **5.** Rezultatul calculului $(-3)^3 + (-5)^2$ este egal cu:
A. 12; B. –2; C. –6; D. 16.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete:

(1p) **1.** Aflați rezultatul calculului $[18 - (-6) \cdot (-7)] : (-2)^3$.

(1p) **2.** Determinați opusul numărului întreg:

$$x = [(-2)^3]^5 : [(-5)^2 \cdot (-1)^7 + (-3)^3 : (-1)^9]^{11}.$$

(1p) **3.** Determinați valorile pe care le poate lua expresia:

$$E = (-1)^n \cdot 11 - (-1)^{n+1} \cdot (-4) + (-1)^{n+3} \cdot 9,\ n \in \mathbb{N}.$$

(1p) **4.** Notăm cu S_1 și S_2 sumele elementelor mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid |x| < 15\}$, respectiv $B = \{y \in \mathbb{Z}_+ \mid |y| < 85\}$. Calculați $S_2 : S_1$.

Testul 3

Se acordă 1 punct din oficiu.
Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

(1p) **1.** Rezultatul calculului $(-8) + 10 + (-6)$ este egal cu:
A. 9; B. –5; C. –4; D. 7.

(1p) **2.** Rezultatul calculului $(-16) - (-6) - 5$ este egal cu:
A. –18; B. 21; C. 24; D. –15.

(1p) **3.** Rezultatul calculului $3 \cdot (-5) - 2 \cdot (-7)$ este egal cu:
A. –1; B. –12; C. –13; D. –7.

(1p) **4.** Rezultatul calculului $(-18) : 3 + (-24) : (-4)$ este egal cu:
A. –8; B. 0; C. 2; D. –11.

(1p) **5.** Rezultatul calculului $2^4 - (-6)^2$ este egal cu:
A. –26; B. 24; C. 28; D. –20.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete:

(1p) **1.** Aflați rezultatul calculului: $[(-7)^2 + (-3)^3] : (-11)$.

(1p) **2.** Determinați modulul numărului întreg:

$$x = [(-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3]^3 : (-2)^5.$$

(1p) **3.** Comparați numerele întregi:

$$x = -(-5)^{34} : [|2^{26} - 5^{13}| - (-4)^{13}] \text{ și } y = (-2)^{49}.$$

(1p) **4.** Calculați suma:

$$S = (1 + 3) : (-2) + (3 + 5) : (-2) + (5 + 7) : (-2) + ... + (99 + 101) : (-2).$$

Fișă pentru portofoliul elevului

Numele și prenumele:
Clasa a VI-a
Capitolul: Mulțimea numerelor întregi
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziția este adevărată, subliniați litera A, iar dacă propoziția este falsă, subliniați litera F.

(7p) **1.** Suma numerelor întregi –43 și –17 este egală cu –60. A F

(7p) **2.** Numărul întreg $(-1)^{100}$ este egal cu –1. A F

(7p) **3.** Produsul numerelor întregi 4 și –25 este egal cu –100. A F

II. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** Câtul împărțirii $(-80) : (-8)$ este egal cu ....

(7p) **2.** Semnul numărului întreg $(-2021)^{2021}$ este ....

(7p) **3.** Rezultatul calculului $[(-2) \cdot (-2)^2]^{10}$, scris sub formă de putere este egal cu .... .

III. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Rezultatul calculului $(-10)^4 + (-10)^3 - (-10)^2 + (-10)^1 - (-10)^0$ este egal cu:

A. 8981; B. 8990; C. 9910; D. 8889.

(8p) **2.** Se consideră numărul întreg $a = 3^{13} : [(-60) : 4 - (-2) \cdot (-6)]^3$. Opusul numărului întreg a este egal cu:

A. 54; B. –81; C. –36; D. 45.

(8p) **3.** Ultima cifră a numărului întreg $x = [(-7)^3]^{101} : [(-7) \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^3]^4 - 7$ este:

A. 0 ; B. 3; C. 9; D. 1.

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

IV. Se consideră expresia $E = (-1)^n \cdot (-41) + (-1)^{2n} \cdot (-23) + (-1)^{2n+3} \cdot (-11)$,

(8p) $n \in \mathbb{N}$. Determinați valorile expresiei.

V. Se consideră numerele întregi:

$x = \{(-6)^3 : [2 \cdot (-3)^2] - 113\}^{19} : \{[(-3)^{23} + (-3)^{22} - (-3)^{21}] : (-27)^7\}^{17}$ și

$y = |2^{93} - 3^{62}| - |3^{46} - 2^{92}| - |2^{92} + 3^{46} + 3^{62}|$.

(8p) a) Arătați că $x = -5^{40}$.

(8p) b) Comparați numerele x și y.

Lecția 11. Ecuații în $\mathbb{Z}$

Citesc și rețin

O egalitate de forma $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ $(a \neq 0)$, $ax + b = c$ $(a \neq 0)$, unde a, b, $c \in \mathbb{Z}$ și $x \in \mathbb{Z}$ se numește **ecuație cu o necunoscută**.

Numerele întregi a, b și c se numesc coeficienți, iar numărul întreg x se numește necunoscută sau variabilă.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{Z}$ se numește **soluție** a ecuației $ax + b = c$, $(a \neq 0)$ și $x \in \mathbb{Z}$ dacă $au + b = c$ (u verifică ecuația).

A rezolva ecuația $ax + b = c$, $(a \neq 0)$ și $x \in \mathbb{Z}$ înseamnă a determina mulțimea de soluții $S = \{u \in \mathbb{Z} \mid au + b = c\}$.

Definiție: Două ecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

Cum se aplică?

1. Verificați dacă numărul întreg -3 este soluție pentru ecuația:
a) $6 : x = -2$; b) $1 - 2x = 5$.

Soluție:
a) $6 : x = -2 \Rightarrow 6 : (-3) = -2 \Rightarrow -2 = -2$ (A), deci -3 este soluție;
b) $1 - 2x = 5 \Rightarrow 1 - 2 \cdot (-3) = 5 \Rightarrow 1 + 6 = 5 \Rightarrow 7 = 5$ (F), deci -3 nu este soluție.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $3x + 1 = -2$; b) $x : (-5) = -4$.

Soluție:
a) $3x + 1 = -2 \Leftrightarrow 3x = -2 - 1 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = (-3) : 3 \Leftrightarrow x = -1$;
b) $x : (-5) = -4 \Leftrightarrow x = (-4) \cdot (-5) \Leftrightarrow x = 20$.

3. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile următoare:
a) $28 : (-x) + 5 = -9$; b) $5(9 - 2x) = 25 - 6x$.

Soluție:
a) $28 : (-x) + 5 = -9 \Leftrightarrow 28 : (-x) = -9 - 5 \Leftrightarrow 28 : (-x) = -14 \Leftrightarrow -x = 28 : (-14) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$;
b) $5(9 - 2x) = 25 - 6x \Leftrightarrow 45 - 10x = 25 - 6x \Leftrightarrow -10x + 6x = 25 - 45 \Leftrightarrow -4x = -20 \Leftrightarrow x = (-20) : (-4) \Leftrightarrow x = 5$.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Verificați dacă numărul întreg -2 este soluție pentru ecuația:
a) $x + 7 = 5$; b) $4x = -10$; c) $-7x = 14$; d) $8 - x = 6$;
e) $18 : (-x) = 9$; f) $5x = x - 8$; g) $3(x - 1) = 9$; h) $x : (-2) = 12$.

g) $3(x - 1) = 9$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $x + 4 = 1$; b) $x + 6 = 2$; c) $x + 8 = 2$; d) $x + 7 = 3$;
e) $x - 5 = -3$; f) $x - 2 = -5$; g) $x - 4 = -9$; h) $x - 6 = -7$.

d) $x + 7 = 3 \Leftrightarrow$

g) $x - 4 = -9 \Leftrightarrow$

3. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile următoare:

a) $2x = -8$; b) $3x = -6$; c) $4x = -8$; d) $3x = -9$;
e) $-4x = -12$; f) $-3x = -15$; g) $-2x = -14$; h) $-4x = -24$.

c) $4x = -8 \Leftrightarrow$

h) $-4x = -24 \Leftrightarrow$

Exerciții și probleme de dificultate redusă

4. Rezolvați ecuațiile următoare, unde $x \in \mathbb{Z}$:

a) $x : (-5) = 4$; b) $x : (-3) = 5$; c) $x : (-7) = 2$; d) $x : (-4) = 7$;
e) $x : (-8) = -5$; f) $x : (-7) = -4$; g) $x : (-4) = -9$; h) $x : (-9) = -3$.

5. Rezolvați în $\mathbb{Z}^*$ următoarele ecuații:

a) $20 : x = -5$; b) $28 : x = -7$; c) $36 : x = -6$; d) $42 : x = -6$;
e) $-16 : x = -4$; f) $-18 : x = -2$; g) $-27 : x = -3$; h) $-35 : x = -7$.

6. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $2x - 5 = -9$; b) $3x + 4 = -5$; c) $4x - 1 = -9$;
d) $7 - 5x = -13$; e) $2 - 9x = -25$; f) $6 - 4x = -22$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

7. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $5x - 21 = 2x$; b) $7x + 48 = -x$; c) $30 - 3x = 2x$;
d) $-x + 56 = 6x$; e) $42 - x = -7x$; f) $-x - 27 = 2x$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

a) $3(2x - 5) = -9$; b) $7(3x + 1) = -14$; c) $5(4x + 3) = 15$;
d) $2(5 - 6x) = 34$; e) $3(4 + 5x) = 42$; f) $4(6 + 2x) = -8$.

9. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile următoare:

a) $4x - 6 = 2x - 14$; b) $7x + 15 = 4x - 6$; c) $8x - 5 = 4x - 17$;
d) $10 - 2x = 3x - 15$; e) $13 - 7x = 23 - 2x$; f) $39 - 9x = 21 - 3x$.

10. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

a) $2(5 - x) = 3x$; b) $5(x + 6) = 2x$; c) $8(7 - x) = 6x$;
d) $3(2x + 4) = 4x$; e) $5(2x - 4) = 6x$; f) $2(4x + 5) = 3x$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

11. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $5(2x + 3) = 7x - 21$; b) $4(3x - 2) = 8x - 28$; c) $3(19 - x) = 4x - 13$;
d) $6(15 - x) = 2x + 34$; e) $8 - 4x = 2(14 + 3x)$; f) $6 + 7x = 3(12 + 4x)$.

12. Rezolvați următoarele ecuații, unde $x \in \mathbb{Z}$:

a) $5(2x - 3) = 4(3x + 7) - 13$; b) $7(3x - 4) + 19 = 3(5x - 7)$;
c) $6(5 - 3x) = 20 - 5(4 + 3x)$; d) $2(11 - 3x) = 16 - 3(8 - 3x)$.

13. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $(-3)^3 \cdot [(-7)^2 - 10x] = (-3)^4 x$; b) $(-4)^3 \cdot [(-5)^3 + 13x] = (-2)^5 x$;
c) $(-2)^5 \cdot [3x + (-3)^2 \cdot 7] = (-2)^4 x$; d) $(-5)^2 \cdot [2x - (-2)^3] = (-4)^2 \cdot 3x$.

14. Rezolvați următoarele ecuații, unde $x \in \mathbb{Z}$:

a) $|7x - 1| = 6$; b) $|4x + 3| = 5$; c) $|5x + 1| = 4$;
d) $|7 - 2x| = 19$; e) $|2 - 3x| = 13$; f) $|9 + 2x| = 31$.

15. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ următoarele ecuații:

a) $2[23 + 3(|x| - 7)] = 10|x|$; b) $5[29 - 4(8 - |x|)] = 15|x|$;
c) $2[11 - 3(2|x| - 1)] = -5|x|$; d) $2[25 + 2(1 - 3|x|)] = -3|x|$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

16. Rezolvați ecuațiile următoare, unde $x \in \mathbb{Z}$:

a) $|1 - 2x| + |8x - 4| = 15$; b) $|3x - 1| - |3 - 9x| = -8$.

17. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$9(1 + x) + 9(11 - 2x) + \ldots + 9(\underbrace{111\ldots1}_{100 \text{ de cifre}} - 100x) = 18 + 108 + \ldots + \underbrace{1000\ldots08}_{101 \text{ cifre}}.$$

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $1 + 6x = 13$; b) $10x = 70$; c) $x : (-8) = 10$.

(3p) **2.** Rezolvați următoarele ecuații, unde $x \in \mathbb{Z}$.
a) $3(2x + 8) = -6$; b) $5x + 4 = 2x - 8$; c) $4(2 - x) = x - 2$.

(3p) **3.** Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $2[21 - 3(5 - 2x)] = 0$.

Model de test pentru Evaluarea Națională

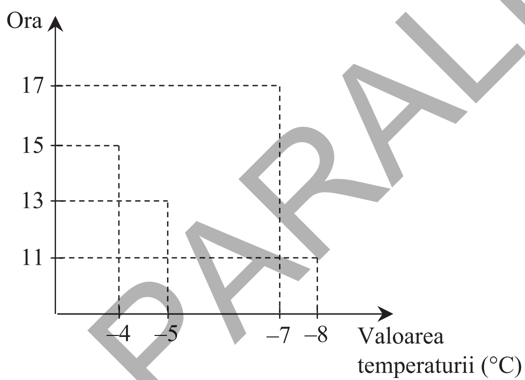
Capitolul: Mulțimea numerelor întregi

PARCUL NAȚIONAL PIATRA CRAIULUI

Parcul Național Piatra Craiului este situat în zona estică a Carpaților Meridionali, pe teritoriul județelor Argeș și Brașov. Clima în masivul muntos Piatra Craiului este asemănătoare cu clima regiunilor înalte din Carpații Meridionali fiind influențată de altitudine și orientarea crestelor față de soare.

Pentru a răspunde la cerințele 1-3, citiți următorul text:

În masivul muntos Piatra Craiului, valoarea medie anuală a temperaturii este cuprinsă între 2 ℃ în partea inferioară și –1 ℃ pe creste. În graficul următor sunt prezentate valorile temperaturii înregistrate într-un interval de timp de 6 ore într-o zi din luna aprilie.



Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Conform informațiilor din tabel temperatura minimă înregistrată în intervalul de timp 11-17 a fost la ora:

A. 11; B. 17; C. 13; D. 15.

2. Conform informațiilor din tabel variația temperaturii în intervalul de timp 11-17 a fost de:

A. –2°C; B. –3°C; C. –4°C; D. –5°C.

3. Conform informațiilor din tabel media temperaturii în intervalul de timp 11-17 a fost egală cu:

A. –3°C; B. –4°C; C. –5°C; D. –6°C.

Pentru a răspunde la cerințele 4-6, citiți următorul text:

După terminarea clasei a V-a, Ștefan împreună cu părinții lui au mers într-o excursie în Parcul Național Piatra Craiului. Obiectivul excursiei era escaladarea vârfului Pietricica cu înălțimea de 1764 m. Se știe că vârsta lui Ștefan este un număr prim de două cifre identice, suma dintre vârsta lui Ștefan și vârstele părinților lui este egală cu cel mai mare număr prim de două cifre consecutive, iar vârsta mamei și vârsta tatălui său sunt numere întregi pare și consecutive.

4. Aflați suma vârstelor părinților lui Ștefan.

5. Aflați vârsta mamei lui Ștefan.

6. Aflați peste câți ani vârsta tatălui lui Ștefan va fi egală cu dublul vârstei fiului său.

Pentru a răspunde la cerințele 7-9, citiți următorul text:

Ștefan împreună cu părinții săi au ajuns pe creasta vârfului Pietricica după 4 ore mergând pe un traseu turistic cu lungimea de 3750 m, marcat cu un triunghi albastru aplicat pe arbori și pe stânci. Pe lungimea traseului triunghiul albastru era aplicat de 51 de ori la distanțe egale, primul triunghi fiind aplicat la începutul traseului, iar ultimul triunghi fiind aplicat pe creasta muntelui. Se știe că după primele două ore de la începutul ascensiunii, Ștefan și părinții lui au parcurs $\frac{3}{5}$ *din lungimea traseului, iar în ora următoare numărul de triunghiuri albastre întâlnite a fost egal cu triplul numărului de triunghiuri albastre întâlnite în ultima oră.*

7. Aflați distanța la care sunt aplicate triunghiurile albastre pe traseul turistic.

8. Aflați numărul de triunghiuri albastre întâlnite de Ștefan și părinții lui în primele două ore.

9. Calculați distanțele parcurse de Ștefan și părinții lui în ora a treia și în ora a patra.

Capitolul IV
MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Lecția 14. Mulțimea numerelor raționale. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional

Citesc și rețin

Definiție: Orice pereche de numere naturale (a, b), $a \neq 0$, $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ reprezintă un număr rațional pozitiv.

Orice fracție echivalentă cu fracția $\frac{a}{b}$ reprezintă același număr rațional pozitiv, prin urmare mulțimea fracțiilor echivalente cu fracția $\frac{a}{b}$ reprezintă numărul rațional pozitiv $\frac{a}{b}$.

Exemplu: Mulțimea $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\right\}$ reprezintă numărul rațional pozitiv $\frac{1}{2}$.

Mulțimea numerelor raționale pozitive se notează cu $\mathbb{Q}_+$.

Definiție: Dacă $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*)$ este un număr rațional pozitiv, numărul $-\frac{a}{b}$ îl vom numi număr rațional negativ.

Mulțimea numerelor raționale negative se notează cu $\mathbb{Q}_-$.

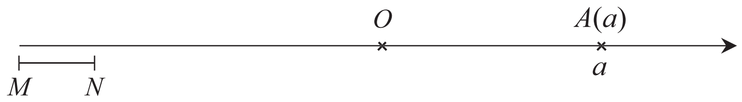
Reuniunea mulțimilor $\mathbb{Q}_-$, $\{0\}$ și $\mathbb{Q}_+$ se numește mulțimea numerelor raționale și se notează cu $\mathbb{Q}$. În concluzie: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.

Definiție: O pereche de numere întregi (a, b), $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ reprezintă un număr rațional.

Observații:

- Între mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$ au loc incluziunile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Orice număr rațional poate fi reprezentat printr-o fracție ordinară sau printr-o fracție zecimală finită sau infinită periodică (simplă sau mixtă).
- Transformarea unei fracții ordinare în fracție zecimală și transformarea unei fracții zecimale în fracție ordinară au fost predate în clasa a V-a.

Axa numerelor este o dreaptă pe care se fixează un punct O, numit origine, se stabilește un sens de parcurgere (de la origine spre dreapta), și se alege o unitate de măsură (un segment MN de lungime oarecare).



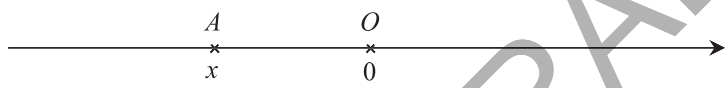
Oricărui număr rațional a îi corespunde pe axa numerelor un punct A, notat $A(a)$, care se numește imaginea numărului a. Numărul rațional a se numește abscisa punctului A.

Definiție: Două numere raționale se numesc opuse dacă sunt abscisele a două puncte de pe axa numerelor, simetrice în raport cu originea acesteia.

Observație: Opusul numărului rațional 0 este 0.

Exemple: opusul numărului $\frac{4}{5}$ este $-\frac{4}{5}$; opusul numărului $-\frac{3}{8}$ este $\frac{3}{8}$.

Definiție: Distanța, măsurată pe axa numerelor, între origine și punctul a cărui abscisă este numărul rațional x se numește modulul lui x și se notează $|x|$.



$|x| = OA$

Proprietățile modulului

1. $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.
2. $|x| = 0$, dacă și numai dacă $x = 0$.
3. $|x| = |-x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.
4. $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Definiție: Partea întreagă a numărului rațional x, notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Exemple: $\left[\frac{8}{3}\right] = \left[2\frac{2}{3}\right] = 2$; $[-7{,}2] = -8$.

Observație: Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $[x] \leq x < [x] + 1$.

Definiție: Partea fracționară a numărului rațional x, notată $\{x\}$ este diferența dintre x și partea sa întreagă ($\{x\} = x - [x]$).

Exemple: $\left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3} - \left[\frac{8}{3}\right] = \frac{8}{3} - {}^{3)}2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}(6)$; $\{-7{,}2\} = -7{,}2 - [-7{,}2] = -7{,}2 - (-8) = -7{,}2 + 8 = 0{,}8$.

Observație: Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $0 \leq \{x\} < 1$.

Cum se aplică?

1. Transformați în fracții ordinare ireductibile următoarele fracții zecimale:

a) 1,2; b) 4,(6); c) 2,8(3).

Soluție:

a) $1{,}2 = \frac{12^{(2}}{10} = \frac{6}{5}$; b) $4{,}(6) = 4\frac{6^{(3}}{9} = 4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$;

c) $2{,}8(3) = 2\frac{83-8}{90} = 2\frac{75^{(15}}{90} = 2\frac{5}{6} = \frac{17}{6}$.

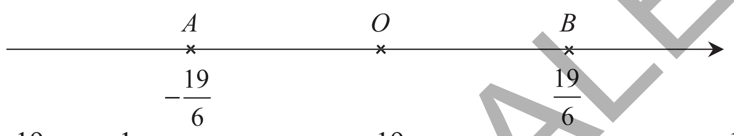
2. Se consideră numărul rațional $x = \frac{19}{6}$.

a) Reprezentați pe axa numerelor opusul și modulul numărului rațional x.

b) Pentru opusul numărului rațional x determinați partea întreagă și partea fracționară scrisă sub formă zecimală.

Soluție:

a) Opusul numărului $\frac{19}{6}$ este $-\frac{19}{6}$, iar modulul este $\left|\frac{19}{6}\right| = \frac{19}{6}$.



b) $-x = -\frac{19}{6} = -3\frac{1}{6}$, deci $[-x] = -4$; $-\frac{19}{6} = -3{,}1(6)$, deci $\{-x\} = -\frac{19}{6} - (-4) =$

$= -\frac{19}{6} + {}^{6)}4 = -\frac{19}{6} + \frac{24}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}8(3)$.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{4}{11}, -\frac{27}{8}, \frac{16}{45}\right\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

a) $E = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Q}_+\}$; b) $F = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Q}_-\}$.

a)	b)

2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. Opusul numărului rațional:

a) $\frac{13}{2}$ este $\frac{2}{13}$; ☐ b) $-\frac{7}{9}$ este $\frac{7}{9}$; ☐ c) $\frac{5}{6}$ este $-\frac{5}{6}$; ☐ d) $\frac{8}{5}$ este $-\frac{5}{8}$. ☐

3. Scrieți sub formă zecimală următoarele fracții ordinare:

a) $\frac{813}{10} =$ ....; b) $\frac{27}{10} =$ ....; c) $\frac{43}{10} =$ ....; d) $\frac{581}{10} =$ ....;

e) $\frac{89}{10} =$ ....; f) $-\frac{3}{10} =$ ....; g) $-\frac{7}{10} =$ ....; h) $\frac{111}{10} =$ ....

4. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

a) $\frac{103}{100} =$ ....; b) $\frac{51}{100} =$ ....; c) $\frac{29}{100} =$ ....; d) $\frac{801}{100} =$ ....;
e) $\frac{1103}{100} =$ ....; f) $-\frac{9}{100} =$ ....; g) $-\frac{7}{100} =$ ....; h) $\frac{5161}{100} =$ ....

5. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

a) $\frac{4019}{1000} =$ ....; b) $\frac{803}{1000} =$ ....; c) $\frac{207}{1000} =$ ....; d) $\frac{6421}{1000} =$ ....;
e) $-\frac{53}{1000} =$ ....; f) $-\frac{9}{1000} =$ ....; g) $-\frac{7}{1000} =$ ....; h) $-\frac{81}{1000} =$ ....

6. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\left|\frac{17}{31}\right| = \frac{17}{31}$; ☐ b) $\left|-\frac{4}{5}\right| = -\frac{4}{5}$; ☐ c) $\left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8}$; ☐
d) $\left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$; ☐ e) $\left|\frac{19}{24}\right| = \left|-\frac{19}{24}\right|$; ☐ f) $\left|\frac{7}{6}\right| = -\frac{7}{6}$. ☐

Exerciții și probleme de dificultate redusă

7. Scrieți opusele următoarelor numere raționale:

a) $\frac{5}{2}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $-\frac{8}{5}$; d) $-\frac{4}{3}$;
e) $\frac{11}{8}$; f) $-\frac{26}{17}$; g) $-\frac{16}{35}$; h) $\frac{41}{72}$.

8. Calculați:

a) $\left|\frac{7}{6}\right|$; b) $\left|-\frac{8}{3}\right|$; c) $\left|-\frac{5}{9}\right|$; d) $\left|\frac{2}{5}\right|$;
e) $\left|\frac{34}{15}\right|$; f) $\left|-\frac{72}{13}\right|$; g) $\left|-\frac{25}{16}\right|$; h) $\left|\frac{81}{98}\right|$.

9. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{71}{5}$; c) $\frac{9}{4}$; d) $\frac{8}{25}$; e) $\frac{51}{50}$; f) $\frac{4}{5}$; g) $\frac{27}{4}$; h) $\frac{1}{8}$.

10. Scrieți sub formă zecimală următoarele fracții ordinare:

a) $\frac{13}{3}$; b) $\frac{25}{9}$; c) $\frac{37}{9}$; d) $\frac{56}{3}$; e) $\frac{22}{15}$; f) $\frac{73}{18}$; g) $\frac{61}{24}$; h) $\frac{97}{30}$.

11. Scrieți sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) 6,5; b) 0,24; c) 17,5; d) 5,04;
e) 1,125; f) 0,016; g) 0,0048; h) 0,0375.

12. Scrieți sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) 0,(3); b) 0,(6); c) 7,(3); d) 5,(6);
e) 4,(18); f) 0,(36); g) 1,(03); h) 2,(54).

13. Calculați:

a) $\left|2\frac{1}{4}\right|-\left|-\frac{1}{4}\right|$; b) $\left|1\frac{2}{5}\right|+\left|-\frac{8}{5}\right|$; c) $\left|-2\frac{5}{6}\right|-\left|-\frac{5}{6}\right|$; d) $\left|-\frac{7}{8}\right|+\left|3\frac{1}{8}\right|$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

14. Scrieți sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) 0,1(3); b) 0,1(6); c) 1,2(6); d) 2,2(3);
e) 14,8(3); f) 1,02(7); g) 0,24(54); h) 0,2(387).

15. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere raționale:

a) $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, -\frac{11}{4}$; b) $\frac{5}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{25}{6}, \frac{16}{3}$;

c) $-\frac{11}{6}, -\frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{17}{6}$; d) $\frac{5}{5}, -\frac{16}{5}, \frac{27}{10}, -\frac{9}{2}$.

16. Determinați partea întreagă și partea fracționară scrisă sub forma zecimală pentru numărul rațional:

a) $\frac{12}{25}$; b) 2,75; c) 41,(3); d) 1,(54); e) –5,(6); f) $-\frac{11}{6}$.

17. Calculați:

a) $|-0,(3)|+\left|2\frac{2}{3}\right|$; b) $\left|-3\frac{2}{3}\right|-|-1,(3)|$; c) $\left|3\frac{1}{3}\right|-|-1,(6)|$;

d) $|3,1(6)|-\left|-2\frac{5}{6}\right|$; e) $|-0,6(1)|+\left|-3\frac{7}{18}\right|$; f) $\left|-5\frac{1}{6}\right|-|4,8(3)|$.

18. Determinați a 75-a zecimală a următoarelor numere raționale:

a) 17,(2); b) 40,(5); c) 1,(24); d) 5,(75);
e) 802,(107); f) 300,2(58); g) 10,1(203); h) 1,73(425).

19. Determinați numărul întreg x pentru care următoarea fracție ordinară este echiunitară:

a) $\frac{2x-19}{4x-11}$; b) $\frac{7x+14}{3x+26}$; c) $\frac{3x+27}{8x-18}$.

20. Se consideră numerele raționale $a = \overline{x,(yx)} + \overline{y,(xy)}$ și $b = \overline{x,y(x)} + \overline{y,x(y)}$, unde $x \neq 0$, $y \neq 0$ și $x \neq y$. Arătați că $a = b$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

21. Determinați numărul întreg n pentru care următoarele fracții ordinare sunt echivalente:

a) $\frac{4}{2n-2}, \frac{7}{4n-1}$; b) $\frac{3n-3}{4}, \frac{2n+5}{5}$; c) $\frac{3}{4n-7}, \frac{6}{5n+4}$.

22. Arătați că pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$, fracția ordinară $\dfrac{n^2+n-2}{n^2-n+2}$ este reductibilă.

23. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, următoarele fracții sunt ireductibile:

a) $\dfrac{2n+3}{3n+4}$; b) $\dfrac{5n+9}{4n+7}$; c) $\dfrac{6n+1}{8n+1}$.

24. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, $a \neq 0$, care îndeplinește condiția: $\dfrac{\overline{ab}}{a} = \overline{10,b(a)}$.

25. Aflați cifrele a, b și c ($a \neq 0$, $c \neq 0$) pentru care are loc egalitatea: $\dfrac{\overline{ab}}{c} = 13,a(b)$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

26. Se consideră mulțimea $A = \left\{\dfrac{1}{2002}, \dfrac{2}{2001}, \dfrac{3}{2000}, \ldots, \dfrac{1001}{1002}\right\}$. Determinați mulțimea $B = \left\{\dfrac{a}{b} \;\middle|\; \dfrac{a}{b} \text{ este reductibilă, } \dfrac{a}{b} \in A\right\}$.

27. Arătați că fracția ordinară $\dfrac{2^{102}+3^{201}}{2^{201}-3^{102}}$ este reductibilă și reprezintă un număr rațional pozitiv.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale:

a) $\dfrac{7}{10}$; b) $\dfrac{8}{3}$; c) $\dfrac{5}{6}$.

(3p) **2.** Transformați următoarele fracții zecimale în fracții ordinare ireductibile:

a) 2,25; b) 0,(72); c) 1,6(1).

(3p) **3.** Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului rațional:

$$a = (|-2,1(3)| - |1,(6)|) : |-0,(3)|.$$

Lecția 15. Compararea numerelor raționale

Citesc și rețin

Numărul rațional *a* este **mai mic** decât **numărul rațional *b*** dacă punctul $A(a)$ este situat pe axa numerelor în stânga punctului $B(b)$. Notăm $a < b$ sau $b > a$.

Observații:

1. Oricare două numere raționale a și b pot fi comparate, adică ele se găsesc în una dintre situațiile $a > b$ sau $a = b$ sau $a < b$.

Lecția 22. Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ $(a \neq 0)$, $ax + b = c$ $(a \neq 0)$, unde a, b și c sunt numere raționale

Citesc și rețin

O egalitate de forma: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ $(a \neq 0)$, $ax + b = c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, și $x \in \mathbb{Q}$ se numește **ecuație cu o necunoscută**.

Numerele raționale a, b și c se numesc coeficienți, iar numărul rațional x se numește necunoscută sau variabilă.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{Q}$ se numește **soluție** a ecuației $ax + b + c$ $(a \neq 0)$ și $x \in \mathbb{Q}$ dacă $au + b = c$ (spunem că u verifică ecuația).

A rezolva ecuația $ax + b = c$ $(a \neq 0)$ și $x \in \mathbb{Q}$ înseamnă a determina mulțimea de soluții:

$$S = \{u \in \mathbb{Q} \mid au + b = c\}.$$

Definiție: Două ecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

Cum se aplică?

1. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $\frac{25}{18}x = -\frac{20}{27}$; b) $0{,}8 : x = 1{,}(3)$; c) $\frac{1}{4} + x = 1\frac{3}{4}$.

Soluție:

a) $\frac{25}{18}x = -\frac{20}{27} \Leftrightarrow x = -\frac{20}{27} : \frac{25}{18} \Leftrightarrow x = -\frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{27}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{8}{15}$;

b) $0{,}8 : x = 1{,}(3) \Leftrightarrow \frac{8^{(2}}{10} : x = 1\frac{3^{(3}}{9} \Leftrightarrow \frac{4}{5} : x = 1\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{5} : x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} : \frac{4}{3} \Leftrightarrow$

$x = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{5} \cdot \frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$;

c) $\frac{1}{4} + x = 1\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{6^{(2}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $2\frac{1}{4} + x = \frac{5}{6}$; b) $3(7 - 4x) = 5$; c) $\frac{1 - x}{4} + \frac{2}{7} = \frac{x}{2}$.

Soluție:

a) $2\frac{1}{4} + x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} - 2\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = {}^{2)}\frac{5}{6} - {}^{3)}\frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{10}{12} - \frac{27}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{17}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1\frac{5}{12}$;

b) $3(7-4x)=5 \Leftrightarrow 21-12x=5 \Leftrightarrow -12x=5-21 \Leftrightarrow -12x=-16 \Leftrightarrow x=$
$=\frac{-16^{(4}}{-12} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$;

c) $\frac{^{7)}1-x}{4}+\frac{^{4)}2}{7}=\frac{^{14)}x}{2} \Leftrightarrow 7-7x+8=14x \Leftrightarrow -7x-14x=-7-8 \Leftrightarrow -21x=-15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=\frac{-15^{(3}}{-21} \Leftrightarrow x=\frac{5}{7}$.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Verificați dacă numărul rațional $\frac{1}{4}$ este soluție pentru următoarele ecuații:

a) $100x = 25$; b) $\frac{6}{5}x=\frac{3}{10}$; c) $4x + 1 = 0$;

d) $2 : x - 3 = 5$; e) $x+\frac{1}{4}=0{,}5$; f) $2(1-2x) = 1$.

e)

2. Rezolvați ecuațiile următoare, unde x este număr rațional:

a) $8x = 6$; b) $4x = 10$; c) $6x = 15$; d) $9x = 3$;
e) $12x = -21$; f) $-20x = 28$; g) $-8x = -12$; h) $-6x = -15$.

f) $-20x = 28 \Leftrightarrow$

g) $-8x = -12 \Leftrightarrow$

3. Rezolvați următoarele ecuații în mulțimea numerelor raționale:

a) $x + 7 = 9$; b) $x - 3 = 7$; c) $x - 8 = 5$; d) $x + 2 = 7$;
e) $14 + x = 31$; f) $21 - x = 12$; g) $43 + x = -1$; h) $39 - x = -6$.

f) $21 - x = 12 \Leftrightarrow$

g) $43 + x = -1 \Leftrightarrow$

4. Rezolvați ecuațiile următoare, unde $x \in \mathbb{Q}$:

a) $\frac{4}{3}x=\frac{5}{9}$; b) $\frac{5}{2}x=\frac{3}{8}$; c) $\frac{6}{7}x=\frac{8}{5}$;